Chapitre 2 : **Les probabilités conditionnelles** TES

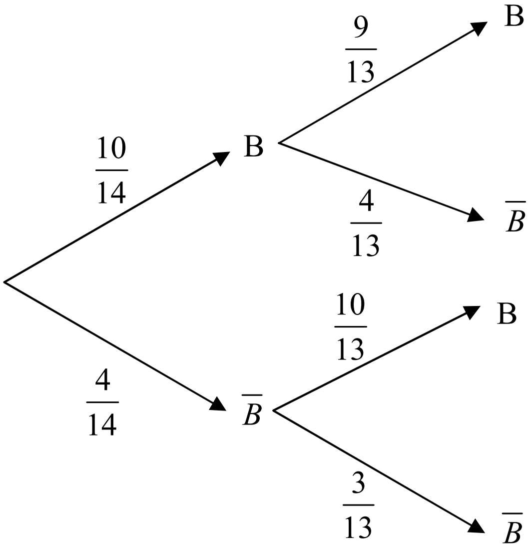
- *Construire un arbre pondéré en lien avec une situation donnée.*
- *Exploiter la lecture d'un arbre pondéré pour déterminer des probabilités.*
- *Calculer la probabilité d'un évènement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.*

I. Arbres pondérés

Exemple : Le jeu consiste à tirer au hasard et sans remise 2 boules dans une urne qui contient 10 boules blanches et 4 boules noires. Si on tire 2 boules blanches, on gagne. Sinon, on perd.
On note B l'évènement « tirer une boule blanche » et $\overline{B}$ l'évènement « tirer une boule noire »

a) Modélise cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
b) Calcule la probabilité P(W) de gagner .
c) Calcule la probabilité P(L) de perdre de 2 manières différentes

a)



b) La probabilité de gagner est la probabilité de tirer une première boule blanche, puis une seconde. D'après l'arbre pondéré, on a :

P(W) = $\frac{10}{14}\times\frac{9}{13}$

P(W) = $\frac{90}{182} \approx 0,49$

c) 1ère méthode : La probabilité de perdre P(L) est égale à la probabilité de ne pas gagner. On a donc :

P(L) = $1-\frac{90}{182}$

P(L) = $\frac{92}{182} \approx 0,51$

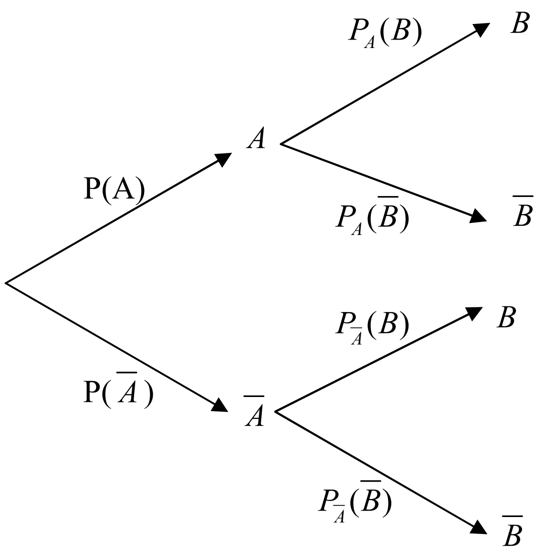
<u>2^{ème} méthode</u> : On additionne les probabilités de tirer au moins une boule noire.

P(L) = $\frac{10}{14}\times\frac{4}{13}+\frac{4}{14}\times\frac{10}{13}+\frac{4}{14}\times\frac{3}{13}=\frac{40+40+12}{182}=\frac{92}{182}\approx 0,51$

> **Remarques :** Dans un arbre pondéré, la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.
> Dans un arbre pondéré, la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches de ce chemin.

II. Probabilité conditionnelle

On considère un arbre pondéré :



Dans cet arbre, $P_A(B)$ se lit « probabilité de B sachant que A est réalisé ».
On parle alors de probabilité conditionnelle, car elle dépend de la réalisation ou non d'un évènement.

> **Définition:** Si $P(A)\neq 0$, la probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé est : $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

> **Proposition :** Si $P(A)\neq 0$ et $P(B)\neq 0$, alors : $P_B(A)\times P(B)=P_A(B)\times P(A)$

Démonstration : On a : $P_B(A)\times P(B)=P(A\cap B)$

Et : $P_A(B)\times P(A)=P(B\cap A)$

Donc : $P_B(A)\times P(B)=P_A(B)\times P(A)$

Exemple : Au lycée, il y a 50% de filles et 30% des élèves sont demi-pensionnaires. Parmi ces demi-pensionnaires, 65% sont des filles. On choisit un élève au hasard.

a) Quelle est la probabilité que ce soit une fille demi-pensionnaire ?
b) Quelle est la probabilité que ce soit une demi-pensionnaire sachant que c'est une fille ?

a) On note F l'évènement « être une fille », D l'évènement « être demi-pensionnaire ».
D'après l'énoncé : $P(F)=0,5$; $P(D)=0,3$; $P_D(F)=0,65$

On cherche la probabilité qu'un élève pris au hasard soit une fille demi-pensionnaire :

$$P(F\cap D)=P(D)\times P_D(F)$$

$$\underline{P(F\cap D)=0,3\times 0,65=0,195}$$

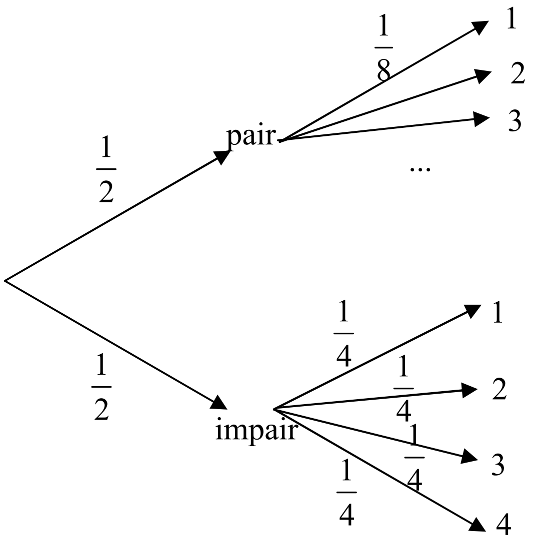
b) On cherche la probabilité qu'un élève pris au hasard soit demi-pensionnaire sachant que c'est une fille : $P_F(D)=\dfrac{P(F\cap D)}{P(F)}$

$$\underline{P_F(D)=\frac{0,195}{0,5}=0,39}$$

<u>Définition:</u> Soient A et B deux évènements tels que $P(A)\neq 0$ et $P(B)\neq 0$.
Les évènements A et B sont <u>indépendants</u> si $P_A(B)=P(B)$ ou $P_B(A)=P(A)$

III. Formule des probabilités totales

<u>Exemple :</u> L'expérience consiste à jeter un dé à 6 faces. Si le résultat est pair, alors on jette un second dé à 8 faces. S'il est impair, alors on jette un second dé à 4 faces. Quelle est la probabilité d' « obtenir 1 » au second lancer ?



Soit P l'évènement « obtenir un résultat pair au 1er lancer » et I l'évènement « obtenir un résultat impair au 1er lancer ».
Soit U l'évènement « obtenir 1 au second lancer ».
Il existe 2 façons d'obtenir 1 au second lancer :
- soit on a un résultat pair puis un 1
- soit on a un résultat impair puis un 1

D'où : $P(U)=P(U\cap P)+P(U\cap I)$

$$P(U)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$$

$$P(U)=\frac{1}{16}+\frac{1}{8}$$

$$P(U)=\frac{3}{16}$$

Proposition :
Soient A_1, A_2, ... , A_n des sous ensembles disjoints de l'univers Ω tels que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$. (on dit que les évènements A_1, A_2, ... , A_n forment une partition de Ω)
Soit B un évènement quelconque. On a : $P(B)=P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+\ldots+P(B\cap A_n)$

Exemple : Une maladie se répand et on a procédé à une campagne de vaccination : 70 % des habitants sont vaccinés. Une étude statistique montre que 5 % des vaccinés sont malades, ainsi que 60 % des non vaccinés.
On choisit au hasard un habitant et on considère les événements V : « il est vacciné » et M : « il est malade ».

a) Donner P(V), P($\overline{V}$), $P_V(M)$, $P_V(\overline{M})$, $P_{\overline{V}}(M)$, $P_{\overline{V}}(\overline{M})$

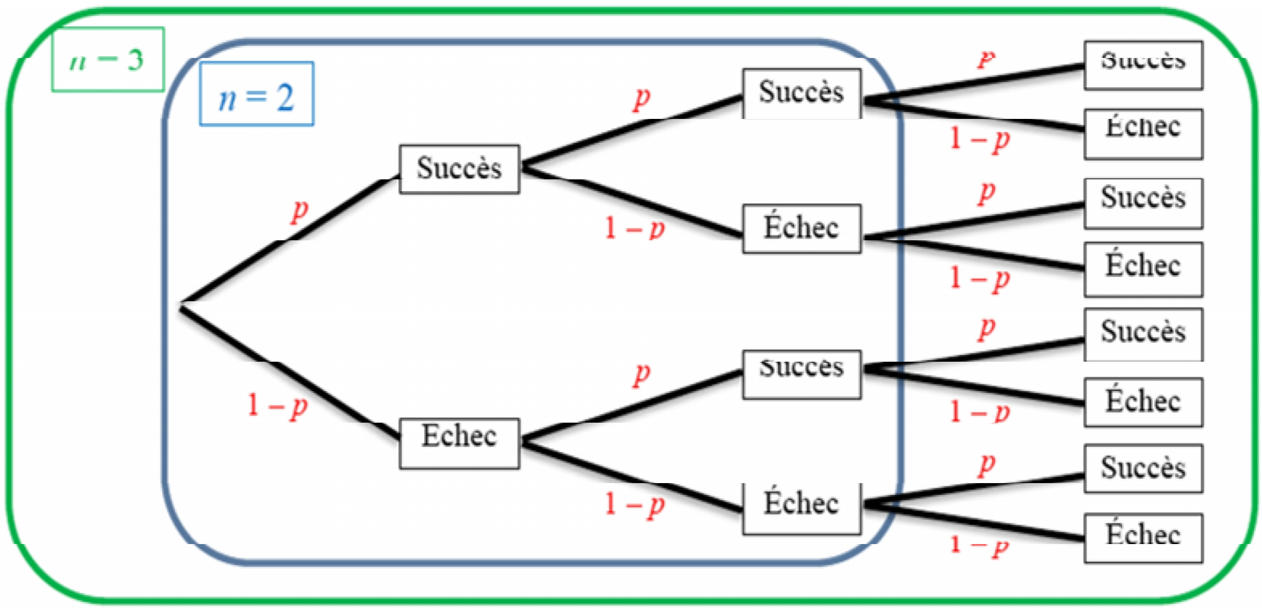
b) Construire un arbre pondéré correspondant à cette situation.

c) En déduire P($V\cap M$), P($\overline{V}\cap M$) et enfin P(M).

IV. Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Définition : Un schéma de Bernoulli est la répétition de n épreuves identiques et indépendantes où seules deux issues sont possibles pour chacune : S (succès) et $\overline{S}$ (échec). On note P(S) = p

Arbre pondéré associé au schéma de Bernoulli :



Définition : La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès lors de ces n épreuves suit une loi de probabilité que l'on appelle loi binomiale de paramètre n et p. On la note $\mathcal{B}(n;p)$.

Dans un schéma de Bernoulli à 2 épreuves, on a :

$P(X=0) = (1-p).(1-p) = (1-p)^2$ Il y a 1 seul chemin pour 0 succès

$P(X=1) = (1-p).p + p.(1-p) = 2p.(1-p)$ Il y a 2 chemins pour 1 succès

$P(X=2) = p^2$ Il y a 1 seul chemin pour 2 succès

Dans un schéma de Bernoulli à 3 épreuves, on a :

$P(X=0) = (1-p).(1-p).(1-p) = (1-p)^3$ Il y a 1 seul chemin pour 0 succès

$P(X=1) = (1-p)^2.p+(1-p).p.(1-p)+p(1-p)^2 = 3p.(1-p)^2$ Il y a 3 chemins pour 1 succès

$P(X=2) = (1-p).p^2+p.(1-p).p+p^2.(1-p) = 3p^2.(1-p)$ Il y a 3 chemins pour 2 succès

$P(X=3) = p^3$ Il y a 1 seul chemin pour 3 succès

Exemple: On tire 4 fois de suite avec remise une carte dans un jeu de 52 cartes. On considère qu'il y a succès lorsqu'on tire un As.

a) Quelle loi suit la variable qui compte le nombre de succès à cette épreuve ?

b) Détaille cette loi.

Solution :

a) Il s'agit d'un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire qui compte le nombre de succès à cette épreuve suit une loi binomiale de paramètres 4 et $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$. $\mathcal{B}(4;\frac{1}{13})$

b)

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	$\approx 0{,}73$	$\approx 0{,}24$	$\approx 0{,}03$	$\approx 0{,}002$	$\approx 0{,}000\,04$

Définition : On appelle coefficient binomial le nombre de chemins réalisant k succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p. On note ce coefficient $\binom{n}{k}$.

Remarque : On peut calculer ces coefficients à l'aide de la calculatrice:

CASIO : $\binom{5}{3}$ = 5 $\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{\text{PROB}}$ $\boxed{\text{nCr}}$ 3 $\boxed{\text{EXE}}$ = 10

T.I. : $\binom{5}{3}$ = 5 $\boxed{\text{MATH}}$ $\boxed{\text{PRB}}$ $\boxed{\text{nCr ou Combin.}}$ 3 $\boxed{\text{ENTER}}$ = 10

Propriété : Si X suit une loi binomiale, alors pour tout $k \in [\![0;n]\!]$ on a :

$$P(X=k) = \binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k}$$

Exemple: a) Vérifie les résultats de l'exemple précédent.
On tire maintenant 10 fois de suite avec remise une carte dans un jeu de 54 cartes.
On considère qu'il y a succès lorsqu'on tire un AS.
b) Calcule P(X=2) , P(X=5) et P(X=10)

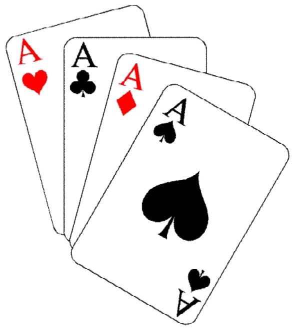
Solution :

a) $P(X=k)=\binom{k}{4}\times\left(\frac{1}{13}\right)^k\times\left(1-\frac{1}{13}\right)^{4-k}$

k	0	1	2	3	4
P(X=k)	≈0,73	≈0,24	≈0,03	≈0,002	≈0, 000 04

b) La variable aléatoire qui compte le nombre de succès à cette épreuve suit une loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$. $\mathscr{B}(10;\frac{1}{13})$

$$P(X=k)=\binom{k}{10}\times\left(\frac{1}{13}\right)^k\times\left(1-\frac{1}{13}\right)^{10-k}$$



$$P(X=2)=\binom{2}{10}\times\left(\frac{1}{13}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{13}\right)^8=10\times\left(\frac{1}{13}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{13}\right)^8$$

$\underline{P(X=2)\approx 0,14}$

$$P(X=5)=\binom{5}{10}\times\left(\frac{1}{13}\right)^5\times\left(1-\frac{1}{13}\right)^5=252\times\left(\frac{1}{13}\right)^5\times\left(1-\frac{1}{13}\right)^5$$

$\underline{P(X=5)\approx 0,0005}$

$$P(X=10)=\binom{10}{10}\times\left(\frac{1}{13}\right)^{10}\times\left(1-\frac{1}{13}\right)^0=1\times\left(\frac{1}{13}\right)^{10}\times 1$$

$\underline{P(X=10)\approx 7\times 10^{-12}}$