Chapitre 5 : **Intégration** TES

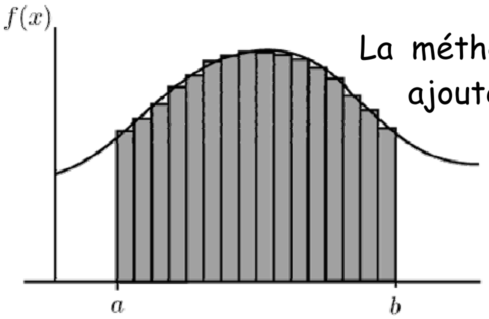
- *Déterminer les primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées.*
- *Connaître et utiliser une primitive de* $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$
- *Calculer une intégrale.*
- *Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes représentatives de deux fonctions positives.*

I. Intégrale d'une fonction positive

Bernhard Riemann

La notion d'intégrale abordée cette année est due à un mathématicien allemand du XIX[ème] du nom de Bernhard Riemann :

Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b], et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O ; I ; J).
L'intégrale de f sur l'intervalle [a ;b] est l'aire délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations x=a et x=b.
L'intégrale de f sur l'intervalle [a ;b] se note $\int_a^b f(x)dx$ (symbole dû à Leibniz)



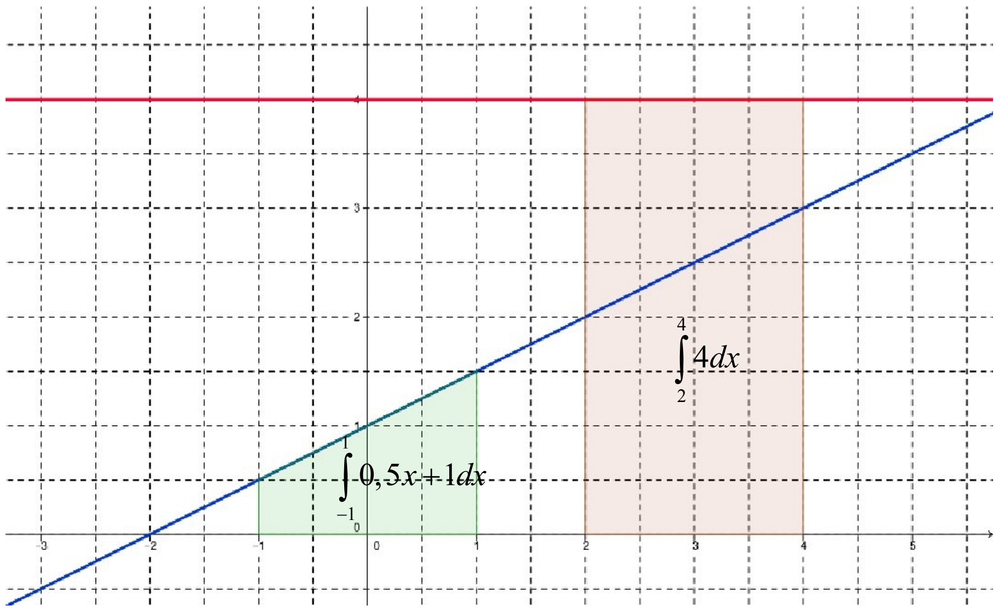
La méthode de Riemann pour déterminer cette aire revient à ajouter les aires d'une infinité de rectangles de largeur ε aussi petite qu'on veut.

Exemples sur des fonctions « simples » :

On considère les fonctions suivantes définies sur $]-\infty;+\infty[$: $f(x)=4$ et $g(x)=0,5x+1$

$$\int_2^4 4dx = 2\times 4 = 8$$

$$\int_{-1}^{1} 0,5x+1dx = \frac{0,5+1,5}{2}\times 2 = 2$$



Remarque : la variable de l'intégrale est aussi appelée variable muette. En effet :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

Théorème : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.

La fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ définie sur $[a;b]$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée $f(x)$.

II. Primitive d'une fonction

Définition : Soit f une fonction continue. Une primitive F de la fonction f est une fonction telle que $F'=f$.

Exemples :

- $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ a pour primitive $F(x) = \frac{1}{x} + 7$. En effet : $F'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ a aussi pour primitive $F(x) = \frac{1}{x} - 5$. En effet : $F'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- $f(x) = 4x + 1$ a pour primitive $F(x) = 2x^2 + x - 9$. En effet : $F'(x) = 4x + 1$

Remarques :

- « F a pour dérivée f » signifie la même chose que « f a pour primitive F ».
- Une fonction f a une infinité de primitives qui ne diffèrent entre elles que d'une constante.

Primitives des fonctions usuelles :

Fonction	Une primitive
$f(x) = a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n \quad , n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$	$F(x) = e^{u(x)}$

Propriété : Si F et G sont deux fonctions primitives des fonctions respectives f et g, alors :

- $F+G$ est une primitive de la fonction $f+g$
- kF est une primitive de la fonction kf, k réel.

III. Intégrale d'une fonction

Définition :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a et b deux nombres réels de I.
L'intégrale de f entre a et b vaut F(b)-F(a) où F est une primitive de f.
On note cette intégrale $\int_a^b f(x)dx$

Exemples : Calculer : $A=\int_2^6 3x^2dx$; $B=\int_1^2 \frac{5}{x^2}dx$; $C=\int_{-10}^{10} e^{2x}dx$

$A=\int_2^6 3x^2dx$

$A=\left[x^3\right]_2^6$

$A=6^3-2^3$

$A=216-8$

$A=208$

$B=\int_1^2 \frac{5}{x^2}dx$

$B=\left[-\frac{5}{x}\right]_1^2$

$B=\left(-\frac{5}{2}\right)-\left(-\frac{5}{1}\right)$

$B=-2,5+5$

$B=2,5$

$C=\int_0^5 e^{2x}dx$

$C=\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^5$

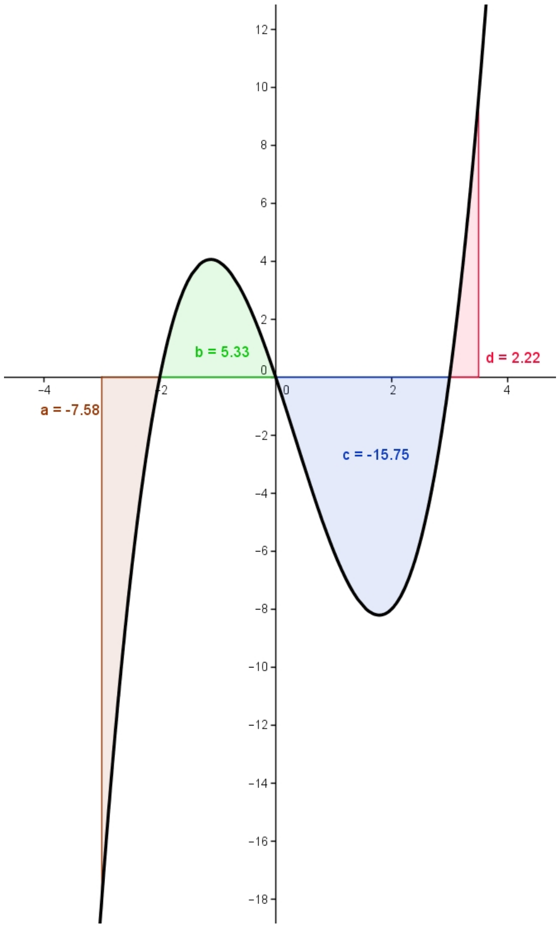
$C=\frac{e^{2\times5}}{2}-\frac{e^0}{2}$

$C=\frac{e^{10}-1}{2}$

$C\approx 11012,7$

Remarque :

- Il est possible de calculer des intégrales de fonctions non positives. Dans ce cas, l'aire située sous l'axe des abscisses comptera négativement. On parle alors d'aire algébrique.



IV. Propriétés de l'intégrale

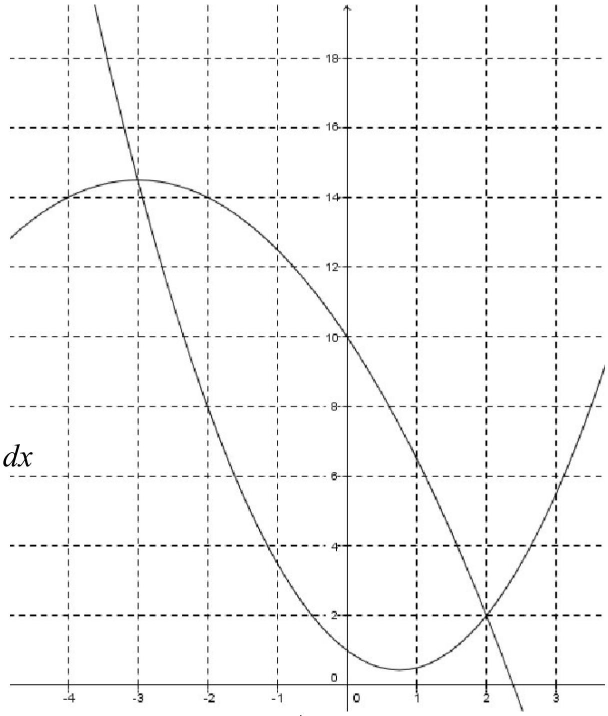
Propriétés :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b et c trois nombres réels de I.

- $\int_a^a f(x)dx=0$
- $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$

Propriétés :
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et a et b deux réels de I.

- $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b k\times f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, où $k\in\mathbb{R}$

Application : Aire entre 2 courbes

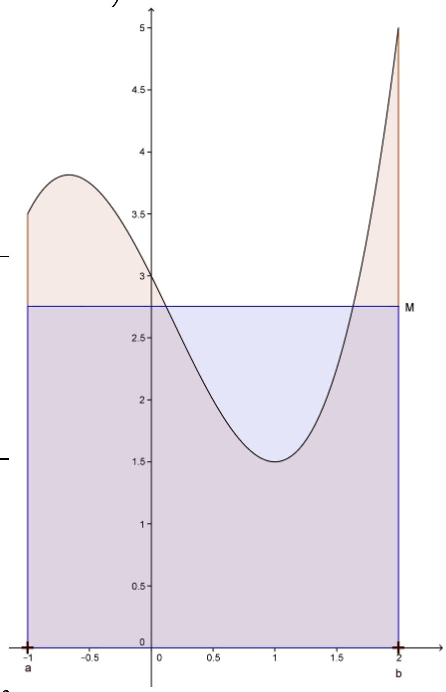


Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que :
$f(x)=x^2-1,5x+1$ et $g(x)=-0,5x^2-3x+10$
Calculer l'aire délimitée par les courbes de f et g.

Il suffit pour cela de faire la différence entre l'aire sous la courbe de g et l'aire sous la courbe de f :

$$\int_{-3}^{2} g(x)dx - \int_{-3}^{2} f(x)dx = \int_{-3}^{2} g(x)-f(x)dx$$
$$= \int_{-3}^{2}\left(-0,5x^2-3x+10\right)-\left(x^2-1,5x+1\right)dx$$
$$= \int_{-3}^{2} -1,5x^2-1,5x+9dx$$
$$= \left[-\frac{1,5}{3}x^3-\frac{1,5}{2}x^2+9x\right]_{-3}^{2}$$
$$= \left(-\frac{1,5}{3}2^3-\frac{1,5}{2}2^2+9\times 2\right)-\left(-\frac{1,5}{3}(-3)^3-\frac{1,5}{2}(-3)^2+9\times(-3)\right)$$
$$= \left(-4-3+18\right)-\left(13,5-6,75-27\right)$$
$$= \underline{31,25}$$

V. Valeur moyenne d'une fonction



Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ (avec $a<b$).

La valeur moyenne de f sur $[a\,;\,b]$ est donnée par : $M=\dfrac{\int_a^b f(t)dt}{b-a}$

Exemple : Calcule la valeur moyenne de la fonction f telle que :
$f(x)=x^3-\dfrac{x^2}{2}-2x+3$ sur l'intervalle [-1 ;2].

On calcule la valeur : $M=\dfrac{\int_{-1}^{2} t^3-\frac{t^2}{2}-2t+3\ \ dt}{2-(-1)}=\dfrac{\left[\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{6}-t^2+3t\right]_{-1}^{2}}{2+1}=\dfrac{8,25}{3}=2,75$