

- Moyenne arithmétique et moyenne géométrique.
- expression en fonction de n du terme de rang n .
- Somme des n premiers termes.

I. Moyennes arithmétiques et géométriques

Définition : Soit a et b deux nombres de même signe.

La moyenne arithmétique des 2 nombres a et b est donnée par la formule : $\frac{a+b}{2}$

Exemple : James a eu 2 notes en maths (même coefficient) : 5 et 13. Quelle est sa moyenne ?

Définition : Soit a et b deux nombres de même signe.

La moyenne géométrique des 2 nombres a et b est donnée par la formule : $\sqrt{a \times b}$

Exemple :

a) Quelle est la moyenne arithmétique de 1,5 et 0,96

b) Une station-service a augmenté ses tarifs de 50% le premier mois, puis les a baissés de 4% le second mois. Quelle est le taux mensuel moyen d'évolution des prix ?

II. Suites de nombres

Exemples :

Complète chacune des suites numériques suivantes :

5 8 11

1 4 9 16

7 14 28 56 112 224 ...

57 18 6 ...

16 48 24 72 36 108 54 162 81 ...

Définition : Une suite numérique est un ensemble de valeurs indexées sur les entiers.

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6

Exemples : $u_0 = 2,4$, $u_1 = 3,6$, $u_2 = 5,4$, $u_3 = 8,1$, ... est une suite numérique que l'on nomme également $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par 1,5

III. Suites arithmétiques

Définition: Une suite arithmétique est une suite où il faut ajouter toujours le même nombre réel r pour passer d'un terme au terme suivant (r est la raison de la suite).

Pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = u_n + r$

ou encore pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + n \times r$

Exemple :

Joey décide de mettre de l'argent de côté. Le premier jour, il met 1€ dans sa tirelire. Le 2^{ème} jour, il met 1,10€, le 3^{ème} jour 1,20€, et ainsi de suite en ajoutant chaque jour 0,10€ à son placement.

Quelle somme devra-t-il placer dans sa tirelire au bout d'un an (365 jours) ?



Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite qui donne les placements de Joey suivant les jours. Ainsi :

$$u_0 = 1, u_1 = 1,1, u_2 = 1,2, u_3 = 1,3$$

$$u_n = 1 + n \times 0,1$$

Le 365^{ème} jour, Joey déposera u_{364} dans sa tirelire.

$$u_{364} = 1 + 364 \times 0,1 = 37,4$$

Joey mettra ainsi 37,4€ dans sa tirelire le 365^{ème} jour.

Propriété: Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .

La somme des $(n+1)$ premiers termes de cette suite (jusqu'à u_n) vaut :

$$\text{Pour tout } n \text{ entier naturel, } u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n+1) \frac{(u_0 + u_n)}{2}$$

Exemple : Calcule la somme mise de côté par Joey au bout d'un an.

On calcule la somme des 365 premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (de u_0 à u_{364}) :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{364} = (364+1) \frac{(u_0 + u_{364})}{2}$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{364} = 365 \times \frac{(1 + 37,4)}{2}$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{364} = 365 \times \frac{38,4}{2}$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{364} = 7008$$

Joey aura placé 7008€ au bout d'un an.

Propriétés: Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .

Si $r > 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Si $r < 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Si $r = 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$

IV. Suites géométriques

Définition: Une suite géométrique est une suite où il faut multiplier toujours par le même nombre réel r pour passer d'un terme au terme suivant (r est la raison de la suite).

Pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = u_n \times r$
ou encore pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times r^n$

Exemple : Joey (toujours le même) décide de placer ses 7008€ sur un livret qui rapporte 4% d'intérêts par an.

Quelle somme aura-t-il dans 10 ans ?

Quelle somme aurait-t-il dans 100 ans ?

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite qui donne les placements de Joey suivant les années. Ainsi :

$$v_0 = 7008, v_1 = 7008 \times 1,04, v_2 = 7008 \times 1,04^2$$

$$v_n = 7008 \times 1,04^n$$

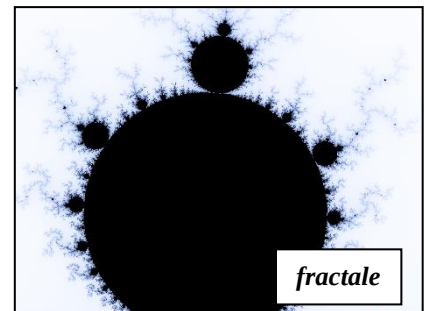
Au bout de 10 ans, Joey aura v_{10} sur son compte en banque.

$$v_{10} = 7008 \times 1,04^{10} \approx 10373,55$$

Joey aura ainsi 10 373,55€ sur son compte au bout de 10 ans.

$$v_{1000} = 7008 \times 1,04^{100} \approx 353\,938,68$$

Joey aurait ainsi 353 938,68€ sur son compte au bout de 100 ans.



Propriété: Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison r .

La somme des $(n+1)$ premiers termes de cette suite (jusqu'à u_n) vaut :

$$\text{Pour tout } n \text{ entier naturel, si } r \neq 1, \quad u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{(1 - r^{n+1})}{(1 - r)}$$

Exemple : Chandler souhaite calculer la somme d'argent totale qu'il gagnera durant sa carrière. Il commence avec un salaire annuel de 15 000€ qui est revalorisé de 3% tous les ans. Quelle somme aura-t-il perçue au bout de 42 ans de carrière ?

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite qui donne le salaire annuel de Chandler :

$$u_0 = 15\,000, u_1 = 15\,000 \times 1,03, u_2 = 15\,000 \times 1,03^2, \dots, u_{41} = 15\,000 \times 1,03^{41}$$

On calcule la somme des 42 premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (de u_0 à u_{41}) :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{41} = u_0 \frac{(1 - r^{42})}{(1 - r)}$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{41} = 15000 \frac{(1 - 1,03^{42})}{(1 - 1,03)}$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{41} \approx 1\,230\,347,95$$

Dans sa carrière, Chandler aura perçu 1 230 347, 95€

Propriétés:

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$ et de raison r .

Si $r > 1$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Si $0 < r < 1$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Si $r = 1$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$