Chapitre 1 :

Suites et récurrence

Spécialité Terminale

- Raisonnement par récurrence
- Rappels sur les suites

I. Suites : rappels

Définition : Une suite de nombres réels est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ qui à tout entier n associe le réel u_n, appelé terme de rang n. La suite elle-même est notée (u_n).

Méthode : Etude du sens de variations d'une suite de réels.

a) On calcule $u_{n+1} - u_n$.

Si pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
Si pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

b) Si la suite est définie pour tout n∈$\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$, alors la suite (u_n) a le même sens de variation que la fonction f sur $[0; +\infty[$.

c) Lorsque tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs :

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exemples : Déterminer le sens de variation des suites ci-dessous :

a) $u_n = -3n^2 - n + 11$

b) $\begin{cases} v_0 = -2 \\ v_{n+1} = v_n + n^2 + 2 \end{cases}$

c) $w_n = \frac{3}{n+2}$

II. Le raisonnement par récurrence : historique

Il est difficile de déterminer précisément l'inventeur du principe de raisonnement par récurrence. Quoiqu'il en soit, un des premiers mathématiciens à l'avoir formulé clairement est Blaise Pascal en 1654. Voici ce qu'il dit à la page 7 de son Traité du triangle arithmétique, à propos de la formule que nous notons maintenant $\binom{n}{p} = \binom{n}{p-1}\frac{n-p+1}{p}$, qu'il démontre par récurrence sur n :

Quoi que cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte, en supposant deux lemmes. Le 1. qui est évident de soi-même, que cette proportion se rencontre dans la seconde base […]. Le 2. que si cette proportion se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante. D'où il se voit, qu'elle est nécessairement dans toutes les bases : car, elle est dans la seconde base par le premier lemme, donc par le second elle est dans la troisième base, donc dans la quatrième, et à l'infini. Il faut donc seulement démontrer le second lemme […]

Le principe de raisonnement par récurrence est par ailleurs intimement lié à la construction de l'ensemble des nombres entiers, ce qui lui a valu l'intérêt de nombreux philosophes des sciences. Selon Henri Poincaré dans « la science et l'hypothèse » (1902), la récurrence est « ***le raisonnement mathématique par excellence*** ». Elle est irréductible à la logique classique car elle est « ***l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible*** ».

III. La démonstration par récurrence

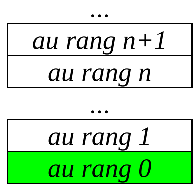
Le raisonnement par récurrence permet de démontrer une propriété ou une formule qui dépend d'un entier. Par exemple, la formule qui permet de calculer la somme des n premiers entiers naturels est : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

On peut vérifier cette formule pour n=0, n=1, pour n=2, pour n=3, etc… mais on ne pourra pas la tester pour chaque valeur de n. Le raisonnement par récurrence nous permet de la démontrer pour toutes les valeurs de n qui sont en nombre infini :

<u>Exemple :</u> On veut montrer par récurrence que, pour tout n∈ℕ, la proposition suivante est vraie : « $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ »

<u>Initialisation :</u> Pour $n=0$, on a : $0 = \frac{0(0+1)}{2} = 0$.

Donc la proposition est vraie au rang initial n=0.



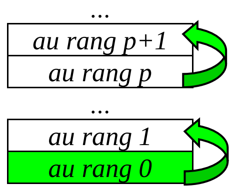
<u>Hérédité :</u> On choisit un rang p pour laquelle la propriété est vraie.

$$\sum_{k=0}^{p} k = 0+1+2+3+...+p = \frac{p(p+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{p} k + (p+1) = 0+1+2+3+...+p+(p+1) = \frac{p(p+1)}{2} + (p+1)$$

$$\sum_{k=0}^{p+1} k = 0+1+2+3+...+p+(p+1) = \frac{p(p+1)}{2} + \frac{2(p+1)}{2}$$

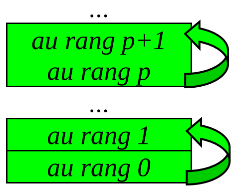
$$\sum_{k=0}^{p+1} k = 0+1+2+3+...+p+(p+1) = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$



On observe alors que la proposition est aussi vraie au rang suivant ($p+1$).

Cette proposition est donc héréditaire.

<u>Conclusion :</u> On a donc montré par récurrence que la proposition « $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ » est vraie pour tout n entier naturel.



<u>Principe du raisonnement par récurrence :</u>

Initialisation : On vérifie que la proposition est vraie au rang n_0

Hérédité : On choisit une valeur n pour laquelle la proposition est vraie, et on montre que cela implique que la proposition est vraie au rang n+1.

Conclusion : On en déduit que la propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$

<u>Exemples :</u>

a) Montrer que pour tout n∈ℕ, n^3-n est un multiple de 3.

b) Montrer que pour tout n∈ℕ, 4^n+11 est un multiple de 3.

c) Montrer que pour tout n∈ℕ, $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

d) Montrer que pour tout n∈ℕ*, $n! \geq 2^{n-1}$ ($n! = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$)

e) La suite (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 \in]0;1[\\ u_{n+1} = u_n(2-u_n) \end{cases}$

Montrer que pour tout n∈ℕ, $0 < u_n < 1$