Chapitre 2 : **Combinatoire et dénombrement** Spécialité Terminale

Combinatoire et dénombrement

- Principe additif : nombre d'éléments d'une réunion d'ensembles deux à deux disjoints
- Principe multiplicatif : nombre d'éléments d'un produit cartésien. Nombre de k-uplets d'un ensemble à n éléments

- *Nombre des parties d'un ensemble à n éléments*
- *Nombre des k-uplets, permutations, définition de n !*
- *Combinaisons*
- *Relation et triangle de Pascal*

I. Ensembles, parties et opérations

Définition : Un ensemble A est une collection d'objets appelés éléments de A. L'ensemble vide noté ∅ est un ensemble qui n'a aucun élément.

Exemple :
On considère 4 couleurs : bleu, vert, rouge et jaune.
{bleu ; jaune} est un ensemble à 2 éléments.
{jaune ; bleu} est le même ensemble que {bleu ; jaune}.
{ } est un ensemble qui ne contient aucun élément. On le note plutôt ∅.

Définition : Une partie (ou un sous-ensemble) B d'un ensemble A est un ensemble B d'éléments de A. On dit alors que B est inclus dans A et on note : $B \subset A$
L'ensemble des parties de A est noté $\mathscr{P}(A)$.

Exemple : On considère l'ensemble A formé de 4 couleurs.
A= {bleu, vert, rouge, jaune}
B={bleu, rouge, jaune} est une partie de A. $B \subset A$
C={vert ; jaune} est une partie de A. $C \subset A$
∅ est une partie de A. $\emptyset \subset A$

Exercice : Combien y-a-t-il de parties dans l'ensemble A ?

On peut déterminer ce nombre en établissant un arbre.

On considère successivement chaque couleur de A, puis on distingue 2 cas :
- la couleur appartient à la partie
- la couleur n'appartient pas à la partie

On en déduit qu'il y a 2^4 parties dans A.

Le nombre de parties de A, est noté Card($\mathscr{P}(A)$) et se lit « cardinal de $\mathscr{P}(A)$ ».
Dans cet exemple : Card($\mathscr{P}(A)$) = 2^4 = 16.

Théorème : Soit A un ensemble à n éléments. $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(A)) = 2^n$

Définitions :
La réunion $A \cup B$ de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B (ou les 2).
L'intersection $A \cap B$ de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A et à B.

Exemple : On considère les ensembles A et B suivants :
A= {vert, jaune, bleu} B={bleu, rouge, jaune}
$A \cup B$ = {bleu, vert, rouge, jaune}
$A \cap B$ = {bleu, jaune}

Remarque : On a toujours : $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

Définition :
Le produit cartésien $A \times B$ de deux ensembles A et B est l'ensemble des couples $(x;y)$ tels que $x \in A$ et $y \in B$.

Exemple : On considère les ensembles A et B suivants :
B={1,2,3} A= {rouge,noir}
$A \times B$ = { (1;rouge), (1;noir), (2;rouge), (2;noir), (3;rouge), (3;noir) }

II. Dénombrement des éléments d'un ensemble

Principe additif : La réunion $A \cup B$ d'un ensemble A à n éléments et d'un ensemble B à p éléments tels que A et B sont disjoints contient $n+p$ éléments.
On note : $\mathrm{Card}(A \cup B) = n+p$

Exemple : On considère les ensembles A et B suivants :
A= {vert, jaune, bleu} B={rouge, noir}
A et B sont bien disjoints car ils n'ont aucun élément commun.
$\mathrm{Card}(A \cup B) = 3 + 2 = 5$

Principe multiplicatif : Le produit cartésien $A \times B$ d'un ensemble A à n éléments et d'un ensemble B à p éléments contient $n \times p$ éléments.
On note : $\mathrm{Card}(A \times B) = n \times p$

Exemple : On considère les ensembles A et B suivants :
A= {vert, jaune, bleu} B={rouge, noir}
$\mathrm{Card}(A \times B) = 3 \times 2 = 6$

III. P-uplets et permutations

Définition : Un p-uplet ou une p-liste d'un ensemble A est une collection ordonnée de p objets de A. Un p-uplet s'écrit avec des parenthèses.

Exemple : On considère l'ensemble A formé des entiers de 1 à 99.

(17 ; 3 ; 54) est un 3-uplet (ou triplet) de A.

(94 ; 34 ; 94 ; 15) est un 4-uplet (ou quadruplet) de A.

(60 ; 27) est un 2-uplet (ou couple) de A.

Propriété : Le nombre de p-uplet d'un ensemble A à n éléments est n^p.

Exemple : Un QCM comprend 10 questions. Pour chaque question, on propose 3 réponses possibles (A,B ou C), parmi lesquelles 1 seule est la bonne.
De combien de manières différentes peut-on répondre à ce QCM ?

Définition : Une permutation d'un ensemble à n éléments est un ordre possible des n objets de cet ensemble.
L'ensemble des permutations d'un ensemble est donc l'ensemble de tous les ordres possibles de cet ensemble

Exemple : On considère l'ensemble A des 26 lettres de l'alphabet.
L'ensemble des permutations de A est l'ensemble de tous les mots de 26 lettres (où chaque lettre est utilisée exactement 1 fois).
Quel est le nombre de permutations de l'ensemble A ?

Propriété :
Le nombre de permutations d'un ensemble A à n éléments est n! (factorielle n).

Exemple : 5 amis (Alphonse, Barnabé, Carlos, Dominique et Ernest) font une course.
Combien y a-t-il de classements possibles ?

Propriété : Soit $p \leqslant n$.
Le nombre de p-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments est $\frac{n!}{(n-p)!}$

Exemple 1 : 5 amis (Alphonse, Barnabé, Carlos, Dominique et Ernest) font une course.
Combien y a-t-il de podiums possibles ?

$$\frac{5!}{(5-3)!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

Exemple 2 : Au départ d'une course de chevaux, il y a 16 partants (numérotés de 1 à 16). Combien de quintés (dans l'ordre) différents sont-ils possibles ?

$$\frac{16!}{(16-5)!} = 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 = 524\,160$$

IV. Combinaisons et triangle de Pascal

Définition : Une combinaison d'un ensemble à p éléments parmi n éléments est le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments. On la note $\binom{n}{p}$.

Remarque : Dans une partie, l'ordre n'a aucune importance, et on ne répète aucun élément. Dans un n-uplet, l'ordre est important et il est possible de répéter un élément.

Exemple : Au départ d'une course de chevaux, il y a 16 partants (numérotés de 1 à 16). Combien de quintés (dans le désordre) différents sont-ils possibles ?

On reprend le résultat précédent qui indique qu'il y a 524 160 quintés différents dans l'ordre.
Si on ne tient plus compte de l'ordre maintenant, on remarque que certains de ces 524 160 quintés sont identiques. Par exemple, les n-uplets (1;2;3;4;5), (5;2;4;1;3) et (5;4;3;2;1) renvoient vers la même partie {1;2;3;4;5}. On a vu précédemment qu'il y avait 5! façons d'ordonner 5 éléments distincts (5! permutations).

On en déduit que le nombre de quintés dans le désordre est donc : $\frac{524\,160}{5!} = \frac{524\,160}{120} = 4368$

Il y a 4368 combinaisons de 5 éléments parmi 18.

Propriété : Soit $p \leqslant n$. $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$

Exemple : Un jeu de loto prévoit de choisir 6 numéros parmi 49. Combien y-a-t-il de combinaisons possibles ?

Propriétés des combinaisons :

Soit n et k des entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$. On a :

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{\text{n}!}{k!(n-k)!}$
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Le triangle de Pascal

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1