Chapitre 3 :

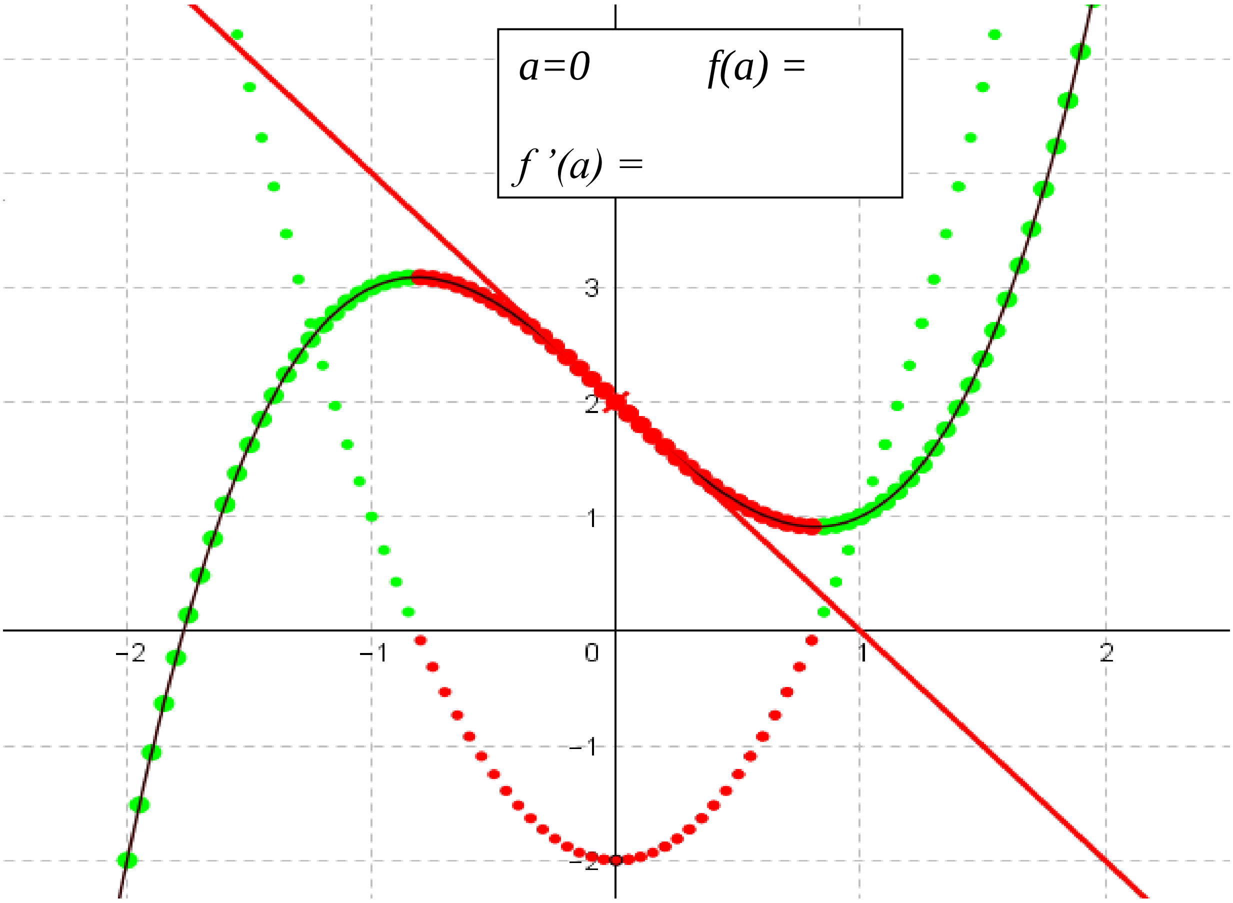
Dérivation – Partie I

Spécialité Terminale

- Dérivée de $u \circ v$
- Dérivée seconde : définition et calcul

I. Rappels

Le nombre dérivé d'une fonction f en a se note f'(a). C'est le coefficient directeur de la tangente en a à la courbe de f.



L'ensemble des valeurs f'(a) définit une fonction dérivée notée f'.

<u>Théorème :</u> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
$\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ ssi f est croissante sur I.
$\forall x \in I, f'(x) \leq 0$ ssi f est décroissante sur I.

Ce tableau indique les fonctions dérivées des fonctions les plus souvent rencontrées :

$f(x)$	$f'(x)$	pour tout x appartenant à
k	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
x^n	$n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+$

Opérations et dérivation :

Dans ce formulaire, u désigne la fonction u(x), et v désigne la fonction v(x).

Somme :	$(u+v)' = u' + v'$
Produit :	$(uv)' = u'v + uv'$
Quotient :	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemples :

II. Dérivée de la composée de 2 fonctions


Leibniz

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et à valeur dans J, et v une fonction définie sur J.

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{u} & J & \xrightarrow{v} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & u(x) & \longmapsto & v(u(x)) \end{array}$$

<u>Définition :</u> La <u>fonction composée</u> de u par v, notée $v \circ u$, est définie pour tout $x \in I$ par :$(v \circ u)(x) = v(u(x))$

<u>Propriété</u> : Si $v \circ u$ est dérivable sur un intervalle I, alors :

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$$

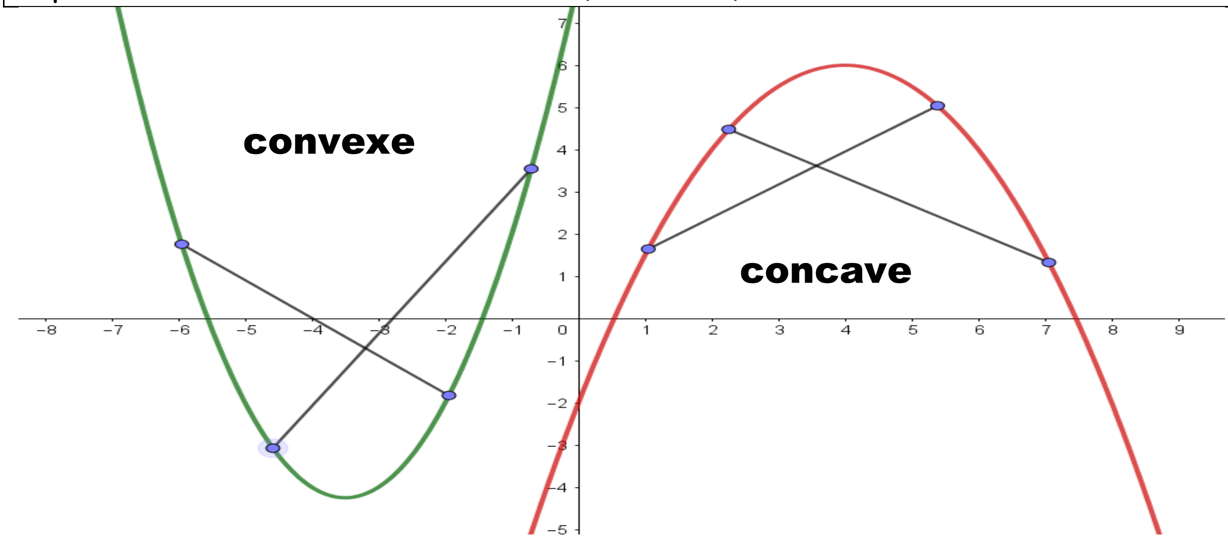
Application à 3 exemples :

…

III. Dérivée seconde d'une fonction

Définition :
f est une fonction dérivable sur I et sa dérivée f' est également dérivable sur I.
f est donc deux fois dérivable sur I et f'' est la dérivée seconde de f.

Définition :
Une fonction convexe (respectivement concave) est une fonction dont la courbe représentative est située en dessous (au dessus) de chacune de ses cordes.



Théorème : Soit f une fonction deux fois dérivable sur I.
f est convexe sur I si et seulement si : $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$
f est convexe sur I si et seulement si sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de ses tangentes

Théorème : Soit f une fonction deux fois dérivable sur I.
f est concave sur I si et seulement si : $\forall x \in I, f''(x) \leq 0$
f est concave sur I si et seulement si sa courbe représentative est entièrement située en dessous de ses tangentes

Définition : Soit f une fonction deux fois dérivable sur I.
Un point d'inflexion en a est un point de la courbe de f pour lequel f''(a)=0, et pour lequel f''(x) change de signe en a.

Exemple : $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 90x + 16$

a) Sur quel intervalle f est-elle dérivable ?
b) Calcule f'(x).
c) Etudie les variations de f.
d) Sur quel intervalle f'' est-elle dérivable ?
e) Calcule f''(x).
f) Etudie la convexité de f.
g) La courbe de f admet-elle un point d'inflexion ?