Chapitre 5 :

Suites et limites

Spécialité
Terminale

- Convergence et divergence d'une suite
- Limites et opérations
- Limite d'une suite géométrique
- Théorème de comparaison et des gendarmes

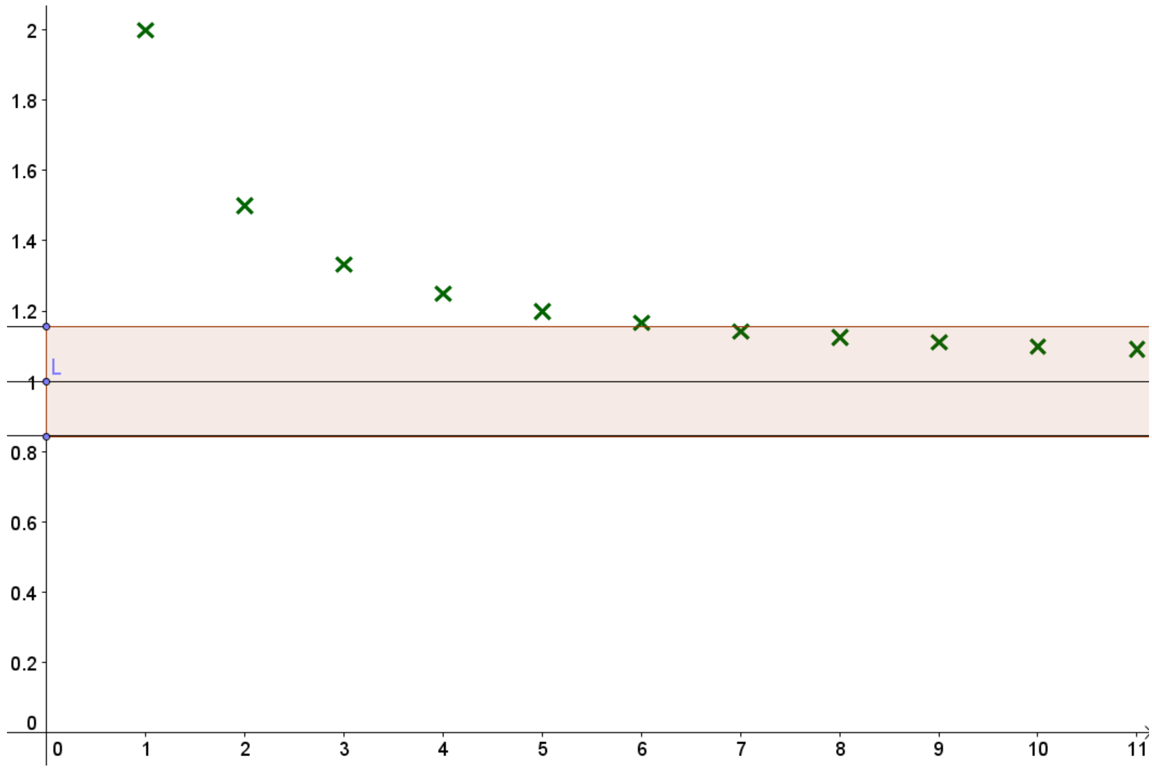
I. Convergence d'une suite

a) Limite finie

Définition : Une suite admet pour limite L si, pour tout réel a, tous les termes de cette suite appartiennent à l'intervalle ouvert $]L-a;L+a[$ **à partir d'un certain rang**.
Une suite qui admet une limite finie est une suite **convergente**.
Une suite qui ne converge pas est une suite **divergente**.

Exemple : La suite (u_n) de terme général : $u_n=\frac{n+1}{n}$ a pour limite 1.

En effet, quelque soit le nombre a qu'on choisisse, on sera capable de trouver un rang de la suite à partir duquel tous les termes seront dans l'intervalle ouvert $]1-a;1+a[$.



Proposition : Les suites de termes généraux $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, ou $\frac{1}{\sqrt{n}}$ convergent vers 0.

On écrit : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$

Démonstration : On considère la suite définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on souhaite montrer que sa limite est 0.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On se donne l'intervalle $]-a;a[$ qui contient 0.

On cherche donc à savoir s'il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à cet intervalle $]-a;a[$.

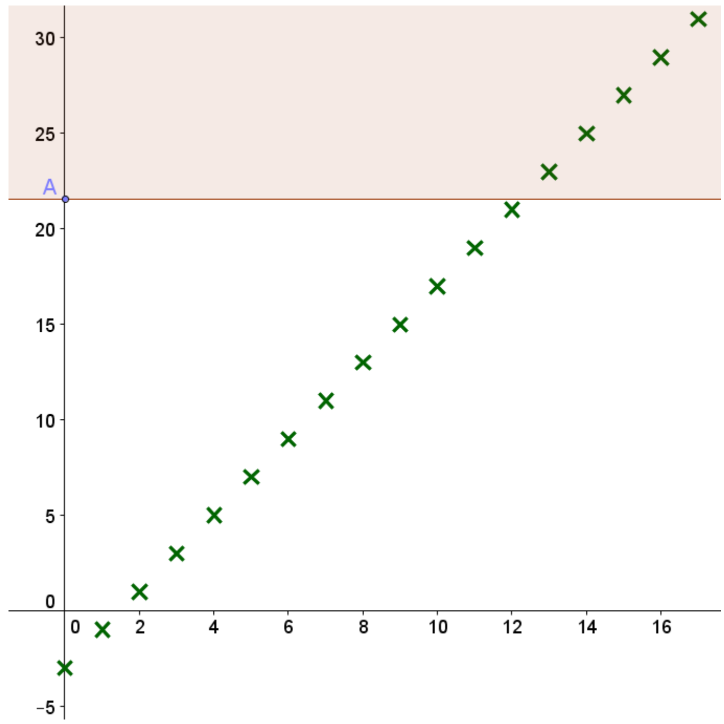
On remarque que si $n > \frac{1}{a}$, alors $\frac{1}{n} < a$, *c'est-à-dire* $u_n < a$.

Et comme $0 < u_n$, on en déduit finalement que si $n > \frac{1}{a}$, alors $u_n \in]-a;a[$.

b) Limite infinie

Définition : Une suite admet pour limite $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de cette suite sont supérieurs à A **à partir d'un certain rang**.
De la même manière, une suite admet pour limite $-\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de cette suite sont inférieurs à A **à partir d'un certain rang**.

Exemple : La suite (u_n) de terme général : $u_n = 2n-3$ a pour limite $+\infty$.
En effet, quelque soit le nombre A qu'on choisisse, on sera capable de trouver un rang de la suite à partir duquel tous les termes seront supérieurs à A. Par exemple, si A vaut 22, alors on s'aperçoit que tous les termes de la suite dont le rang dépasse 13 (c'est-à-dire u_{13}, u_{14}, u_{15}, u_{16}, etc.) sont supérieurs à A.



Proposition : Les suites de termes généraux n, n^2, n^3 ou $\sqrt{n}$ ont pour limite $+\infty$.
On dit également que les suites n, n^2, n^3 ou $\sqrt{n}$ divergent vers $+\infty$.

c) Valeur seuil

On cherche à construire un algorithme qui nous permette de déterminer à partir de quel rang la suite considérée dépassera une valeur seuil S préalablement fixée.

Ici, (u_n) est définie par la relation $u_{n+1} = u_n + n$,pour tout $n \geq 0$, et $u_0 = 1$

En langage naturel :

CODE DE L'ALGORITHME :

```
VARIABLES
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE S
  U PREND_LA_VALEUR 1
  n PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (U<S) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    U PREND_LA_VALEUR U+n
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

RÉSULTATS :

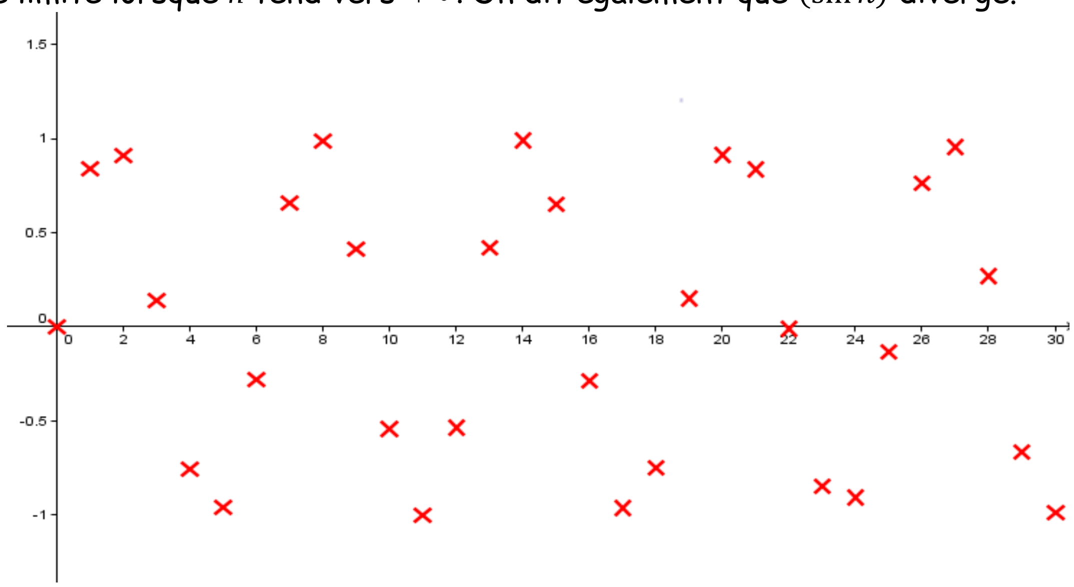
```
***Algorithme lancé***
Entrer S : 500
33
***Algorithme terminé***
```

En Python :

```python
def seuil(S):
    u=1
    n=0
    while u<S:
        u=u+n
        n=n+1
    print(n)
```

```
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>> seuil(500)
33
>>>
```

Remarque : Certaines suites n'ont pas de limite. Par exemple la suite $(\sin n)$ n'admet pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$. On dit également que $(\sin n)$ diverge.



d) Opération sur les limites

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, et l et l' deux réels. On a alors :

lim (u_n+v_n)	lim $v_n = -\infty$	lim $v_n = \ell'$	lim $v_n = +\infty$
lim $u_n = -\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.
lim $u_n = \ell$	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
lim $u_n = +\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$

lim $(u_n \times v_n)$	lim $v_n = -\infty$	lim $v_n = \ell' \neq 0$	lim $v_n = 0$	lim $v_n = +\infty$
lim $u_n = -\infty$	$+\infty$	$-\infty$ si $\ell' > 0$ $+\infty$ si $\ell' < 0$	F.I.	$-\infty$
lim $u_n = \ell \neq 0$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$	$\ell \times \ell'$	0	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$
lim $u_n = 0$	F.I.	0	0	F.I.
lim $u_n = +\infty$	$-\infty$	$-\infty$ si $\ell' < 0$ $+\infty$ si $\ell' > 0$	F.I.	$+\infty$

lim (u_n/v_n)	lim $v_n = -\infty$	lim $v_n = \ell' \neq 0$	lim $v_n = 0$	lim $v_n = +\infty$
lim $u_n = -\infty$	F.I.	$-\infty$ ou $+\infty$	F.I.	F.I.
lim $u_n = \ell \neq 0$	0	ℓ / ℓ'	F.I.	0
lim $u_n = 0$	0	0	F.I.	0
lim $u_n = +\infty$	F.I.	$-\infty$ ou $+\infty$	F.I.	F.I.

F.I. signifie « Forme Indéterminée » ; ce n'est pas une réponse en soi ! Pour connaître la limite dans ces cas, il faudra continuer à chercher en utilisant d'autres méthodes.

Exemples de formes indéterminées :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-2\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-2\right)\right)=+\infty$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2-9}{\pi n^2+n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cancel{n}^2\left(2-\dfrac{9}{n^2}\right)}{\cancel{n}^2\left(\pi+\dfrac{1}{n}\right)}=\dfrac{2}{\pi}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^2+n}{n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}(3n+1)}{\cancel{n}\left(1+\frac{3}{n}\right)} = +\infty$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n-3}-\sqrt{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n-3}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n-3}+\sqrt{n+1}\right)}{\left(\sqrt{n-3}+\sqrt{n+1}\right)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n-3}-\sqrt{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\left((n-3)-(n+1)\right)}{\left(\sqrt{n-3}+\sqrt{n+1}\right)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n-3}-\sqrt{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-4}{\left(\sqrt{n-3}+\sqrt{n+1}\right)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n-3}-\sqrt{n+1}\right) = 0$

Remarque : Le bon réflexe à avoir pour lever une indétermination est de chercher une factorisation de manière à simplifier ensuite par le facteur qui semble l'emporter.

e) Théorèmes de comparaison et des gendarmes

Théorème de comparaison: Soit (u_n) et (v_n) deux suites, et n_0 un entier.

i) Si $u_n \geq v_n$ pour tout $n \geq n_0$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

ii) Si $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq n_0$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration de i) :

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, donc pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang n_A à partir duquel tous les termes de la suite (v_n) sont supérieurs à A.

De plus, $u_n \geq v_n$ pour tout $n \geq n_0$.

Donc en prenant le rang le plus grand entre n_A et n_0, on a bien :

$u_n \geq v_n \geq A$ pour tout $n \geq \max(n_A ; n_0)$

C'est-à-dire $\lim u_n = +\infty$.

Théorème des gendarmes: Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites.

Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$,

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Exemple 1 :

Soit (e_n) la suite définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par :

$$e_n = \frac{11n^2}{4\sin(2n)-7}.$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $e_n \leqslant -n^2$.

2. En déduire la limite de la suite (e_n).

$-1 \leq \sin(2n) \leq 1$

$-4 \leq 4\sin(2n) \leq 4$

$-11 \leq 4\sin(2n) - 7 \leq -3$

$\frac{1}{-11} \geq \frac{1}{4\sin(2n)-7} \geq \frac{1}{-3}$ car la fonction « inverse » est décroissante sur $]-\infty; 0[$

$\frac{11n^2}{-11} \geq \frac{11n^2}{4\sin(2n)-7} \geq \frac{11n^2}{-3}$

$-n^2 \geq e_n \geq \frac{11n^2}{-3}$

Donc pour tout n≥1, $e_n \leq -n^2$

1. On sait que :
   - pour tout n≥1, $e_n \leq -n^2$
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$

   <u>Donc d'après le théorème de comparaison</u> : $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = -\infty$

<u>Exemple 2 :</u>

Soit (b_n) la suite définie, pour tout entier $n \geqslant 4$, par :

$$b_n = \frac{2n+(-1)^n\cos(n)}{3-n}.$$

1. Pour tout entier $n \geqslant 4$, montrer que :

$$\frac{2n-1}{3-n} \geqslant b_n \geqslant \frac{2n+1}{3-n}.$$

2. a. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{3-n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3-n}$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

1. $-1 \leq \cos(n) \leq 1$

   $-1 \leq (-1)^n\cos(n) \leq 1$

   $2n-1 \leq 2n+(-1)^n\cos(n) \leq 2n+1$

   $\frac{2n-1}{3-n} \geq \frac{2n+(-1)^n\cos(n)}{3-n} \geq \frac{2n+1}{3-n}$

   $\boldsymbol{\frac{2n-1}{3-n} \geq b_n \geq \frac{2n+1}{3-n}}$

2. a) $\frac{2n-1}{3-n} = \frac{\cancel{n}(2-\frac{1}{n})}{\cancel{n}(\frac{3}{n}-1)}$

   $\lim\limits_{n\to+\infty} 2-\frac{1}{n} = 2$

   $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n}-1 = -1$

   Donc par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{3-n} = -2$

   $\frac{2n+1}{3-n} = \frac{\cancel{n}(2+\frac{1}{n})}{\cancel{n}(\frac{3}{n}-1)}$

   $\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\frac{1}{n} = 2$

   $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n}-1 = -1$

   Donc par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3-n} = -2$

   b) On a :
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{3-n} = -2$
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3-n} = -2$
   - $\forall n \geq 4$, $\frac{2n-1}{3-n} \geq b_n \geq \frac{2n+1}{3-n}$

   Donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -2$

II. Limite d'une suite géométrique

Rappel: Une suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison $q \neq 0$ est telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = q^n \times u_0$

On a donc :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(q^n \times u_0\right) = u_0 \times \lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ d'après la règle concernant la limite d'un produit.

Pour déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, il suffit donc de connaître $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$.

Propositions :

i) Si $q>1$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

ii) Si $-1<q<1$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

iii) Si $q<-1$, alors la suite (q_n) diverge.

Démonstration de i) :

Si $q>1$ alors on peut poser $q=1+a$ avec $a>0$.

Donc $q^n=(1+a)^n>1+na$ d'après l'inégalité de Bernoulli démontrée en I.

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+na) = 1 + \lim\limits_{n\to+\infty} (na) = +\infty$

Donc d'après le théorème de comparaison de 2 suites (i), on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} (1+a)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

Exemples :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-3\times\sqrt{2}^n\right) = -3\times \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2}^n = -\infty$ car $\sqrt{2}>1$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{7}{2^n}\right) = 7\times \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1<\dfrac{1}{2}<1$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (-\pi)^n$ n'existe pas car $-\pi<-1$. (On n'a même pas le droit de l'écrire)

III. Suites monotones

Définitions :

- Une suite monotone est une suite croissante ou bien décroissante.
- Une suite majorée (u_n) est une suite pour laquelle il existe un réel M (appelé un majorant) tel que: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n \leq M$
- Une suite minorée (u_n) est une suite pour laquelle il existe un réel m (appelé un minorant) tel que: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n \geq m$
- Une suite bornée (u_n) est une suite pour laquelle il existe deux réels m et M tels que: $\forall n\in\mathbb{N},\ m \leq u_n \leq M$

Théorème : i) Une suite croissante majorée est convergente.

ii) Une suite décroissante minorée est convergente.

Exemple : Soit (u_n) une suite telle que $u_0=1$ et $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}$.

a) Montrer par récurrence que (u_n) est croissante et bornée par 0 et 2.

b) Que peut-on en déduire quant à la nature de la suite (u_n) ?

Théorème : i) Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
ii) Une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration de i) :

Soit (u_n) une suite croissante et non majorée.

Comme (u_n) est non majorée, pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang k tel que : $u_k \geq A$

Comme (u_n) est croissante, tous les termes suivants de la suite (u_n) sont supérieurs à A

Donc pour tout réel A, tous les termes de cette suite (u_n) sont supérieurs à A à partir d'un certain rang.

Donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Proposition :

i) Une suite croissante qui a pour limite ℓ a tous ses termes inférieurs à ℓ.

ii) Une suite décroissante qui a pour limite ℓ a tous ses termes supérieurs à ℓ.

Démonstration de i) :

Soit (u_n) une suite croissante telle que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Nous allons raisonner par l'absurde :

Supposons qu'il existe un terme u_k de cette suite tel que $u_k > \ell$. Soit d la distance $u_k - \ell$

On a alors : $\forall n \geq k$, $u_n \geq u_k > \ell$

Or à partir de ce rang k, aucun terme de la suite n'appartient à l'intervalle $\left] \ell - \frac{d}{2} ; \ell + \frac{d}{2} \right[$

Ceci est contradictoire avec le fait que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Donc tous les termes de la suite sont inférieurs à ℓ.