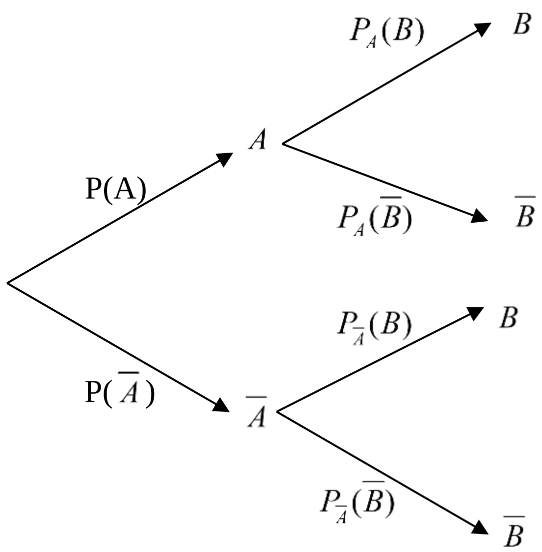
Chapitre 5 :

Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Spécialité Terminale

- *Succession d'épreuves indépendantes*
- *Epreuve et loi de Bernoulli*
- *Schéma de Bernoulli*
- *Loi Binomiale de paramètres n et p et coefficient binomiaux*

I. Probabilité conditionnelle et formule des probailités totales



On considère un arbre pondéré :

Dans cet arbre, $P_A(B)$ se lit « probabilité de B sachant que A est réalisé ».
On parle alors de probabilité conditionnelle, car elle dépend de la réalisation ou non d'un évènement.

<u>Définition:</u> Si $P(A) \neq 0$, la probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé est : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

<u>Exemple :</u> Au lycée, il y a 50% de filles et 30% des élèves sont demi-pensionnaires. Parmi ces demi-pensionnaires, 65% sont des filles. On choisit un élève au hasard.

a) Quelle est la probabilité que ce soit une fille demi-pensionnaire ?
b) Quelle est la probabilité que ce soit une demi-pensionnaire sachant que c'est une fille ?

a) On note F l'évènement « être une fille », D l'évènement « être demi-pensionnaire ».
D'après l'énoncé : $P(F) = 0,5$; $P(D) = 0,3$; $P_D(F) = 0,65$
On cherche la probabilité qu'un élève pris au hasard soit une fille demi-pensionnaire :

$$P(F \cap D) = P(D) \times P_D(F)$$
$$\underline{P(F \cap D) = 0,3 \times 0,65 = 0,195}$$

b) On cherche la probabilité qu'un élève pris au hasard soit demi-pensionnaire sachant que c'est une fille : $P_F(D)=\dfrac{P(F\cap D)}{P(F)}$

$$P_F(D)=\frac{0{,}195}{0{,}5}=0{,}39$$

Définition: Soient A et B deux évènements tels que $P(A)\neq 0$ et $P(B)\neq 0$.
Les évènements A et B sont indépendants si $P_A(B)=P(B)$ ou $P_B(A)=P(A)$

Exemple : Dans une population de 1000 personnes, on vaccine 160 personnes contre un virus. Parmi ces vaccinés, 20 développent tout de même la maladie. Parmi les autres, 105 développent la maladie. On choisit une personne au hasard dans cette population.
On réalise un tableau à double entrée :

	V	$\overline{V}$	total
M	20	105	125
$\overline{M}$	140	735	875
total	160	840	1000

Soit M l'évènement « la personne est tombée malade » et V l'évènement « la personne est vaccinée ». Ces deux évènements sont-ils indépendants ?

On a : $P_V(M)=\dfrac{20}{160}=\dfrac{1}{8}$

Et : $P(M)=\dfrac{105}{840}=\dfrac{1}{8}$

Donc : $P_V(M)=P(M)$

Les deux évènements M et V sont indépendants. On peut donc en déduire que le vaccin semble ne servir à rien.

Proposition :

Soient A_1, A_2, ... , A_n des sous-ensembles disjoints (ou évènements incompatibles) de l'univers Ω tels que $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$. (on dit que les évènements A_1, A_2, ... , A_n forment une partition de Ω)

Soit B un évènement quelconque. On a : $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_n)$

Exemple : Une maladie se répand et on a procédé à une campagne de vaccination : 70 % des habitants sont vaccinés. Une étude statistique montre que 5 % des vaccinés sont malades, ainsi que 60 % des non vaccinés.

On choisit au hasard un habitant et on considère les événements V : « il est vacciné » et M : « il est malade ».

a) Donner $P(V)$, $P(\overline{V})$, $P_V(M)$, $P_V(\overline{M})$, $P_{\overline{V}}(M)$, $P_{\overline{V}}(\overline{M})$

b) Construire un arbre pondéré correspondant à cette situation.

c) En déduire $P(V \cap M)$, $P(\overline{V} \cap M)$ et enfin $P(M)$.

a) $P(V) = 0,7$

$P(\overline{V}) = 0,3$

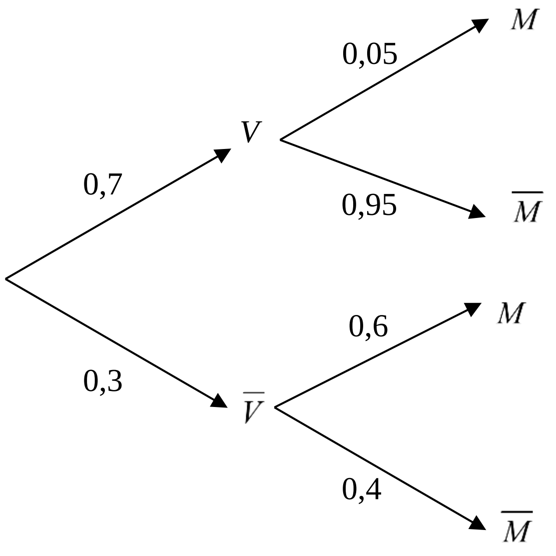
$P_V(M) = 0,05$

$P_V(\overline{M}) = 0,95$

$P_{\overline{V}}(M) = 0,6$

$P_{\overline{V}}(\overline{M}) = 0,4$

b)



c) $P(V \cap M) = P(V) \times P_V(M)$

$P(V \cap M) = 0,7 \times 0,05 = \underline{0,035}$

$P(\overline{V} \cap M) = P(\overline{V}) \times P_{\overline{V}}(M)$

$P(\overline{V} \cap M) = 0,3 \times 0,6 = \underline{0,18}$

$P(M) = P(V \cap M) + P(\overline{V} \cap M)$

$P(M) = 0,035 + 0,18$

$\underline{P(M) = 0,215}$

II. Succession d'épreuves indépendantes

Définition: Une succession d'épreuves indépendantes est une succession d'épreuves dans laquelle chaque épreuve ne dépend pas des épreuves précédentes.

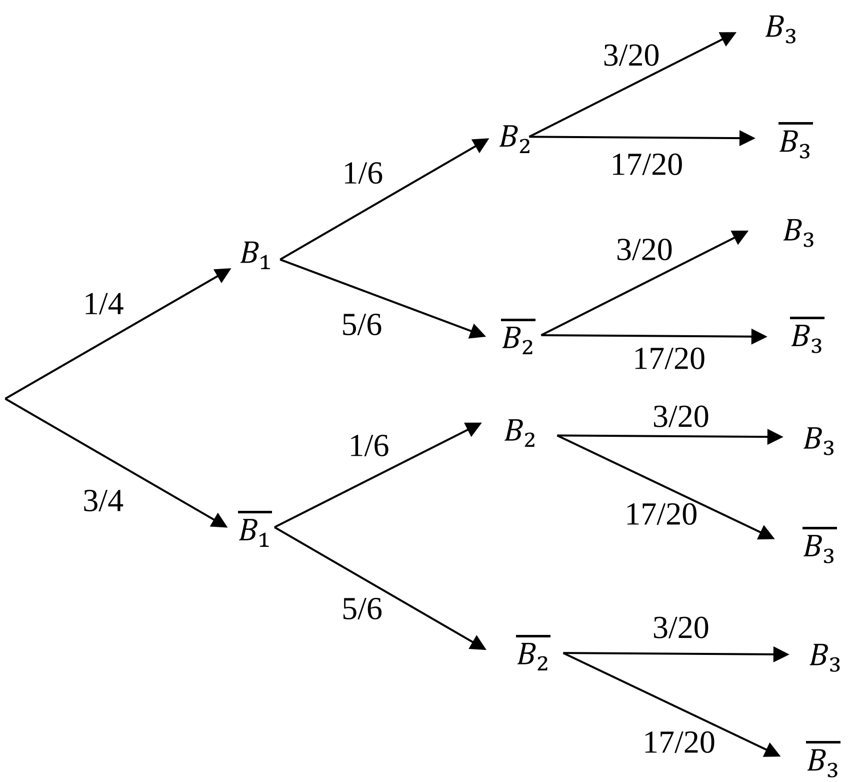
Proposition : Dans une succession de n épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ est égale au produit des probabilités de chacune des issues x_1, $x_2, \dots, x_n$.

Exemple : Un jeu consiste à tirer successivement 3 boules dans 3 urnes différentes. La première urne contient 1 boule blanche et 3 boules noires, la seconde urne contient 2 boules blanches et 10 boules noires, et la troisième urne contient 3 boules noires et 17 boules blanches.
On s'intéresse à la couleur de chacune des boules du tirage.
On note B_i l'issue « tirer une boule blanche dans la i-ème urne »

a) Représente la situation par un arbre pondéré

b) Détermine la loi de probabilité sur l'ensemble des issues de cette expérience aléatoire.

c) On gagne à ce jeu lorsqu'on obtient au moins une boule blanche. Calculer la probabilité de gagner une partie.



b)

Issue	(B_1, B_2, B_3)	$(B_1, B_2, \overline{B_3})$	$(B_1, \overline{B_2}, B_3)$	$(B_1, \overline{B_2}, \overline{B_3})$	$(\overline{B_1}, B_2, B_3)$	$(\overline{B_1}, B_2, \overline{B_3})$	$(\overline{B_1}, \overline{B_2}, B_3)$	$(\overline{B_1}, \overline{B_2}, \overline{B_3})$
Proba-bilité	$\frac{1}{160}$	$\frac{17}{480}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{17}{96}$	$\frac{3}{160}$	$\frac{17}{160}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{17}{32}$

c) Soit G l'évènement « obtenir au moins une boule blanche »

On a : $P(G) = P\left(\overline{(\overline{B_1}, \overline{B_2}, \overline{B_3})}\right) = 1 - P(\overline{B_1}, \overline{B_2}, \overline{B_3}) = 1 - \frac{17}{32} = \frac{15}{32}$

III. Epreuve et loi de Bernoulli

Définitions :
Une épreuve de Bernoulli est une épreuve dans laquelle deux résultats sont possibles : le succès (S) et l'échec ($\bar{S}$).
Une loi de Bernoulli décrit le comportement d'une épreuve de Bernoulli.

Exemple : On lance un dé à 6 faces et on observe le fait d'obtenir un diviseur de 6 ou non. Décrire la loi de cette expérience aléatoire.

Cette expérience aléatoire a deux résultats possibles :

S : « le résultat est un diviseur de 6 »

$\bar{S}$: « le résultat n'est pas un diviseur de 6 »

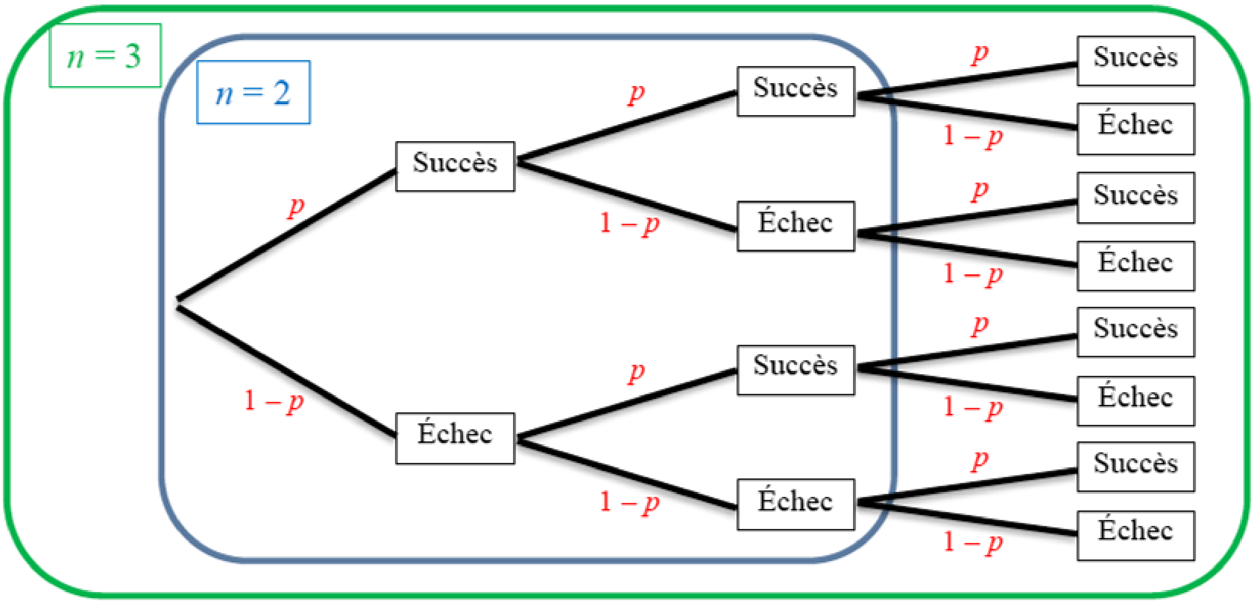
Il s'agit donc d'une épreuve de Bernoulli dont la loi de probabilité est :

Evènement	S	$\bar{S}$
Probabilité	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

IV. Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Définition :
Un schéma de Bernoulli est la répétition de n épreuves identiques et indépendantes où seules deux issues sont possibles pour chacune : S (succès) et $\bar{S}$ (échec).
On note P(S) = p

Arbre pondéré associé au schéma de Bernoulli :



<u>Définition :</u> La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès lors de ces n épreuves suit une loi de probabilité que l'on appelle loi binomiale de paramètre n et p. On la note $\mathscr{B}$(n;p).

Dans un schéma de Bernoulli à 2 épreuves, on a :

P(X=0) = (1-p).(1-p) = $(1-p)^2$ Il y a 1 seul chemin pour 0 succès

P(X=1) = (1-p).p + p.(1-p) = 2p.(1-p) Il y a 2 chemins pour 1 succès

P(X=2) = p^2 Il y a 1 seul chemin pour 2 succès

Dans un schéma de Bernoulli à 3 épreuves, on a :

P(X=0) = (1-p).(1-p).(1-p) = $(1-p)^3$ Il y a 1 seul chemin pour 0 succès

P(X=1) = $(1-p)^2$.p+(1-p).p.(1-p)+p$(1-p)^2$ = 3p.$(1-p)^2$ Il y a 3 chemins pour 1 succès

P(X=2) = (1-p).p^2+p.(1-p).p+p^2.(1-p) = 3p^2.(1-p) Il y a 3 chemins pour 2 succès

P(X=3) = p^3 Il y a 1 seul chemin pour 3 succès

<u>Exemple:</u> On tire 4 fois de suite avec remise une carte dans un jeu de 52 cartes. On considère qu'il y a succès lorsqu'on tire un As.

a) Quelle loi suit la variable qui compte le nombre de succès à cette expérience aléatoire ?

b) Détaille cette loi.

Solution :

a) Il s'agit d'un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire qui compte le nombre de succès à cette épreuve suit une loi binomiale de paramètres 4 et $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. $\mathscr{B}(4;\frac{1}{13})$

b)

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	≈0,73	≈0,24	≈0,03	≈0,002	≈0, 000 04

<u>Définition :</u> On appelle coefficient binomial (ou combinaison) le nombre de chemins réalisant k succès parmi n épreuves dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p. On note ce coefficient $\binom{n}{k}$.

<u>Remarque :</u> On peut calculer ces coefficients à l'aide de la calculatrice:

CASIO : $\binom{5}{3}$ = 5 $\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{\text{PROB}}$ $\boxed{\text{nCr}}$ 3 $\boxed{\text{EXE}}$ = 10 T.I. : $\binom{5}{3}$ = 5 $\boxed{\text{MATH}}$ $\boxed{\text{PROB}}$ $\boxed{\text{Combinaison}}$ 3 $\boxed{\text{ENTER}}$ = 10

<u>Propriété :</u> Si X suit une loi binomiale, alors pour tout k∈ $[\![0;n]\!]$ on a :

$$P(X=k) = \binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k}$$

<u>Exemple:</u> On tire maintenant 10 fois de suite avec remise une carte dans un jeu de 54 cartes. On considère qu'il y a succès lorsqu'on tire un AS.
Calcule P(X=2) , P(X=5) et P(X=10)

Solution :
La variable aléatoire qui compte le nombre de succès à cette épreuve suit une loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$. $\mathscr{B}(10;\frac{1}{13})$

$$P(X=k)=\binom{k}{10}\times\left(\frac{1}{13}\right)^k\times\left(1-\frac{1}{13}\right)^{10-k}$$

$$P(X=2)=\binom{2}{10}\times\left(\frac{1}{13}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{13}\right)^8=10\times\left(\frac{1}{13}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{13}\right)^8\approx 0{,}14$$

$$P(X=5)=\binom{5}{10}\times\left(\frac{1}{13}\right)^5\times\left(1-\frac{1}{13}\right)^5=252\times\left(\frac{1}{13}\right)^5\times\left(1-\frac{1}{13}\right)^5$$

$$\underline{P(X=5)\approx 0{,}0005}$$

$$P(X=10)=\binom{10}{10}\times\left(\frac{1}{13}\right)^{10}\times\left(1-\frac{1}{13}\right)^0=1\times\left(\frac{1}{13}\right)^{10}\times 1\approx 7\times 10^{-12}$$

<u>Propriétés :</u> Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$

Alors :
- $E(X)=np$
- $V(X)=np(1-p)$
- $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$